

$$A \in K^{n \times n}$$

$\chi_A(x)$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

↳ Με τις ρίζες τους να είναι ιδιοτιμές του πίνακα A .

$m_A(x)$ ελάχιστο πολυώνυμο $\rightarrow$ (Μονικό)

$$\hookrightarrow m_A(A) = 0$$

↳ Έχει τον ελάχιστο βαθμό ανάμεσα στα πολυώνυμα $f(x)$ τέτοια ώστε $f(A) = 0$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI)$$

$$\text{Cayley-Hamilton} \leadsto \chi_A(A) = 0_{n \times n}$$

► Για να είναι η f (γραμ. απεικόνιση) διαγωνίσιμη αρκεί $\rightarrow m_A(x)$ γινόμενο πρώτων βαθμών

$$n_i = \dim V_i$$

$\uparrow$ $A \lambda \chi = \text{Γραμ. Πεδιανότητα}$

Άσκηση: Έστω $A \in K^{n \times n}$. Δείξτε ότι αν ισχύει $A^3 - 2017A = 0_{n \times n}$ τότε ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος

$$\text{Θέσω } f(x) = x^3 - 2017x$$

$$\text{τότε } f(A) = 0_{n \times n}$$

$$\xrightarrow{\text{αίτημα}} m_A(x) \mid x^3 - 2017x = x(x - \sqrt{2017})(x + \sqrt{2017})$$

$$w_A(x) \in \left\{ 1, x, x+\sqrt{2017}, x-\sqrt{2017}, x(x-\sqrt{2017}), x(x+\sqrt{2017}), (x-\sqrt{2017})(x+\sqrt{2017}), x(x-\sqrt{2017})(x+\sqrt{2017}) \right\}$$

Άρα το $w_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων
 διαφορετικών μεταξύ τους $\Rightarrow$ Α διαγώνιστρος

► Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Μεθοδολογία: 1) Βρίσκω $\chi_A(x)$ και μετά $\begin{cases} \text{χαρακτηριστικές} \\ \text{ρίζες με ελάχιστο} \end{cases}$ $\textcircled{4}$
 $\rightarrow w_A(x) / \chi_A(x)$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 5 & 1 & -4-x \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+2} (1-x)$$

$$\begin{vmatrix} 4-x & -3 \\ 5 & 4-x \end{vmatrix} = -(x+1) \left((x-4)(x+4) + 15 \right)$$

$$\chi_A(x) = -(x+1)(x^2 - 16 + 15) = -(x+1)^2(x-1)$$

Ξέρω ότι: $w_A(x) / \chi_A(x)$
 $w_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν ως ιδιες ρίζες

$$\text{Άρα } w_A(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1 \quad \textcircled{7} \quad w_A(x) = (x+1)^2(x-1)$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}$$

Άρα $\chi_A(x) = x^2 - 1$

Είναι ο A διαγωνίσιμος;

Ναι, αφού το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο διαφορετικών γραμμικών παραγόντων.

$\rightarrow A^{2017} = ?$

$A^{2017} = A \cdot A^{2016} = (A^2)^{1008} \cdot A = I \cdot A = A$

$A^{-1} = ?$

$A \cdot A^{-1} = I$ άρα $\boxed{A^{-1} = A}$

Είναι ένας πραγματικός διασυστατικός χώρος

Ορισμός: Ένα εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μια αντιστοιχία

$$\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

έτσι ώστε:

i) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (ωμμετρική)

ii) $\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

iii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in E$ και $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\vec{a} = \vec{0}$

Ορισμός: Ένας Ευκλείδους χώρος $(E, \langle, \rangle)$ είναι ένας πραγματικός διαν. χώρος E , εξοπλισμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός: Έστω $\vec{a} \in (E, \langle, \rangle)$ τότε το μήκος του $\vec{a}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \in \mathbb{R}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1) $\langle \vec{a}, \vec{0} \rangle = 0$ για $\forall \vec{a}$

2) Αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \forall \vec{b} \in E$ τότε $\vec{a} = \vec{0}$

3) $\langle \lambda \vec{a}, \mu \vec{b} \rangle = \lambda \mu \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$\langle \vec{a}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{a}, 0 \cdot \vec{0} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{a}, \vec{0} \rangle = 0$$

εφαρμ. των προηγ.
 $\Rightarrow$ ιδιότητα για $\vec{b} = \vec{0}$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \quad (4)$$

Ορισμός: Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγονται
κάθετα (ή ορθογώνια) αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Ορισμός: Το διάνυσμα $\vec{a} \in (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται μοναδιαίο
(ή κανονικό) αν $\|\vec{a}\| = 1$

Πρόταση: Έστω $\vec{b} \in (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με $b \neq 0$, τότε το διάνυ-
σμα $\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ είναι μοναδιαίο (μικρός $\|\vec{b}\| \rightarrow$ πραγματικός
ορισμός)

Απόδειξη: $\left\| \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right\rangle}$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b}, \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b} \right\rangle} \stackrel{(iii)}{=} \sqrt{\frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} =$$

$$\sqrt{\frac{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}}} = 1$$

$$A_v \quad \underline{\|\vec{a}\| = 0}$$

$$\text{Τότε} \quad \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

$$\|\vec{a}\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = 0 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

Παραδείγματα

$\mathbb{R}^n \Leftarrow$ για να ορίσω εσωτερικό γινόμενο πρέπει να έχω πραγματικό διανυσματικό χώρο

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}$$

κανονικό
εσωτερικό
γινόμενο

Ιδιότητα

(ii) Πρέπει ν.δ.ο $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$

$$\bullet \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 \quad \text{αφού } \underline{a_i^2 \geq 0}$$

$$\bullet \quad A_v \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

$$\triangleright \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = A^t \cdot B$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{Αν } B \text{ αληθινό τότε} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ 1 \times n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ n \times 1 \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$$

$$= A^t \cdot I_n B$$

Παρατήρηση

$\mathbb{R}^{m \times n}$ (Παω να ορίσω εσωτερικά γινόμενα)
 ιχνός (αθροισμα στοιχείων της διαγωνίου)

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$$

$m \times n \times n \times m \leadsto m \times m$ Τετραγωνικός

(Αρα μπορώ να μιλήσω για ιχνός)

Ιδιότητες

i) Θελώ $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

ι) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^t)$

$$= \text{tr}((A \cdot B^t)^t) = \text{tr}(A^t (B^t)^t)$$

(Ο X και ο X^t έχουν
 την ίδια διαγώνιο)

$$= \text{tr}((B^t)^t \cdot A^t) = \text{tr}(BA^t) = \underline{\underline{\langle B, A \rangle}}$$

$$\triangleright \underline{\langle A_1 + A_2, B \rangle = \text{tr}((A_1 + A_2) \cdot B^t) = \text{tr}(A_1 B^t + A_2 B^t)}$$

$$\stackrel{\text{αξ. 4}}{=} \stackrel{\text{4.2.2}}{\text{tr γραμμικά}} \text{tr}(A_1 B^t) + \text{tr}(A_2 B^t) = \underline{\langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle}$$

$$\triangleright \underline{\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}(\lambda A \cdot B^t)} \stackrel{\text{tr γραμμ.}}{\text{Αντικαθιστ.}} \lambda \text{tr}(AB^t) = \lambda \langle A, B \rangle$$

$$\text{iii) } \stackrel{1^{\circ} \text{ βκελος}}{\langle A, A \rangle = \text{tr}(A \cdot A^t)} = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times m \rightarrow m \times n$

$$= (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2) + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2) + \dots + (a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \dots + a_{mn}^2) \geq 0$$

2^ο βκελος

$$\text{Έστω } \langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \text{tr}(A \cdot A^t) = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 + \dots + a_{m1}^2 + \dots + a_{mn}^2 = 0$$

$$a_{iz} = 0 \quad \text{για κάθε } i, z$$

$$\text{Άρα } \boxed{A = 0_{m \times n}}$$

Παραδείγματα

Πολυώνυμα

$\mathbb{R}_n[X]$

πολυώνυμα βαθμού μικρότερου
(n) ίσων του n

$$\boxed{\langle F(x), g(x) \rangle = \int_0^1 F(x) g(x) dx}$$

Αποδ

Ιδιότητες

$$i) \langle F(x), g(x) \rangle = \int_0^1 F(x) g(x) dx \xrightarrow[\text{g(x) συν/σει}]{\text{αφου F(x)}} \int_0^1 g(x) F(x) dx = \underline{\underline{\langle g(x), F(x) \rangle}}$$

$$\begin{aligned} ii) \underline{\langle F_1(x) + F_2(x), g(x) \rangle} &= \int_0^1 (F_1(x) + F_2(x)) g(x) dx \\ &= \int_0^1 F_1(x) g(x) + F_2(x) g(x) dx = \int_0^1 F_1(x) g(x) dx + \int_0^1 F_2(x) g(x) dx \\ &= \underline{\langle F_1(x), g(x) \rangle + \langle F_2(x), g(x) \rangle} \quad \left(\begin{array}{l} \text{γεβεται} \\ \text{Αθροισμα} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \underline{\langle \lambda F(x), g(x) \rangle} &= \int_0^1 \lambda F(x) g(x) dx \\ &= \lambda \int_0^1 F(x) g(x) dx = \lambda \langle F(x), g(x) \rangle \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \text{γεβεται το γινόμενο} \end{array} \right) \end{aligned}$$

iii)

5

$$\blacktriangleright \underline{\langle f(x), f(x) \rangle} = \int_0^1 f^2(x) dx \geq \underline{\underline{0}}$$

$$\blacktriangleright \text{ΕΓΤΩ } \underline{\langle f(x), f(x) \rangle} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 0}}$$

Το ίδιο θα ήταν αν αντί $\int_0^1$ θα είχα $\int_a^b$